Recasages possibles : 243, 245, 261, 264, 266.
Référence : Analyse complexe et applications, QUEFFÉLEC[2] (p. 454, 455)

Développement

Proposition 1 Soient $\lambda, \mu > 0$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Théorème 2 Soient $\lambda > 0$ et X, Y deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors, X et Y suivent des lois de Poisson.

- *Preuve de la Proposition 1* : Comme les fonctions génératrices des v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérisent leurs lois, il suffit de montrer que celle de $X+Y$ est la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Soit $T \sim \mathcal{P}(\alpha)$ avec $\alpha > 0$ quelconque. On a
$$\begin{aligned} G_T(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n)s^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}s^n \\ &= e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha s)^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha}e^{\alpha s} = e^{\alpha(s-1)}. \end{aligned}$$
Ainsi, partant de $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ et $G_Y(s) = e^{\mu(s-1)}$, on veut montrer que $G_{X+Y}(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$. Or, par indépendance de X et Y, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$ donc pour tout $|s| \leqslant 1$, $G_{X+Y}(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$. On tombe bien sur la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$, donc comme G_{X+Y} caractérise $\mathbb{P}_{X+Y}$, on a bien $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

- *Preuve du Théorème* : Notons $Z = X + Y$. Remarquons que d'après le calcul de la fonction génératrice d'une loi de Poisson, celle-ci est une fonction entière. Ainsi, on a $\forall s \in \mathbb{C}$, $G_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Montrons tout d'abord que G_X et G_Y sont aussi des fonctions entières. A priori, on a $\forall |s| \leqslant 1$,
$$\begin{aligned} G_X(s)G_Y(s) = G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)s^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)s^n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi, par produit de Cauchy, notant $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ et $q_n = \mathbb{P}(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n q_0 \leqslant e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ et $p_0 q_0 = e^{-\lambda} > 0$ donc $q_0 > 0$ et $p_n \leqslant e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n! q_0}$. Or la série entière $\sum e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!q_0}s^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ donc il en est de même de $\sum p_n s^n$, *i.e* G_X est une fonction entière. Symétriquement, il en est de même pour G_Y. Comme la relation $G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}$ est valable sur $\{|s| \leqslant 1\}$, qui est d'intérieur non vide (donc admet un point d'accumulation), par le principe de prolongement holomorphe, la relation est encore vraie sur $\mathbb{C}$.

Il nous reste à identifier G_X et G_Y. Puisque pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a la relation $G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} \neq 0$, les fonctions entières G_X et G_Y ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe f, g entières telles que $G_X = e^f$ et $G_Y = e^g$. Comme les coefficients des séries entières définissant G_X et G_Y sont positifs, on a pour $s \in \mathbb{C}$, $|G_X(s)| = e^{\mathfrak{Re}(f(s))} \leqslant G_X(|s|)$ et $0 < q_0 \leqslant G_Y(|s|)$ d'où
$$\forall s \in \mathbb{C},\ q_0 e^{\mathfrak{Re}(f(s))} \leqslant G_X(|s|)G_Y(|s|) = e^{\lambda(|s|-1)}.$$

Ainsi, en notant $C = q_0^{-1}e^{-\lambda} > 0$, on a pour tout $s \in \mathbb{C}$, $e^{\mathfrak{Re}(f(s))} \leqslant Ce^{\lambda|s|}$, et de même il existe $C' > 0$ tel que $e^{\mathfrak{Re}(g(s))} \leqslant C'e^{\lambda|s|}$. En passant au logarithme néperien (strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient $\mathfrak{Re}(f(s)) \leqslant \ln(C) + \lambda|s|$. Pour $r > 0$, notons $A(r) = \ln(C) + \lambda r$ de sorte que pour tout $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on ait
$$\mathfrak{Re}\big(f(re^{it})\big) \leqslant A(r).$$

Comme $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, disons $\sum a_n s^n$. Fixons $r \geqslant 0$, et posons $\widetilde{f}_r : t \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{it})$. Alors, la fonction $\widetilde{f}_r$ est 2π-périodique et on a $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\widetilde{f}_r(t) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}.$$

On reconnait la série de Fourier de $\widetilde{f}_r$, et donc ses coefficients de Fourier valent $c_n(\widetilde{f}_r) = a_n r^n$ pour $n \geqslant 0$ et $c_n(\widetilde{f}_r) = 0$ pour $n < 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt \quad \text{et} \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{int}dt.$$

En conjugant la deuxième égalité, puis en sommant celle obtenue à la première, on trouve

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}(f(re^{it}))e^{-int} dt.$$

De plus, comme $\int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\mathfrak{Re}\big(f(re^{it})\big) - A(r) \Big) e^{-int} dt,$$

puis, en tenant compte du fait que $\mathfrak{Re}\big(f(re^{it})\big) \leqslant A(r)$, on obtient

$$\begin{aligned}
|a_n| r^n &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\mathfrak{Re}\big(f(re^{it})\big) - A(r) \Big) e^{-int} dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(A(r) - \mathfrak{Re}\big(f(re^{it})\big) \Big) dt \\
&\leqslant 2A(r) - 2\mathfrak{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \right) \\
&\leqslant 2A(r) - 2\mathfrak{Re}\big(a_0\big)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{r^n} \big(\ln(C) + \lambda r - \mathfrak{Re}(a_0) \big)$$

Par conséquent, dès que $n \geqslant 2$, en faisant tendre r vers $+\infty$ (ce qui est licite car f est entière), on obtient $|a_n| \leqslant 0$, soit $|a_n| = 0$, et donc $\forall s \in \mathbb{C},\ f(s) = a_0 + a_1 s$. Alors, $\forall s \in \mathbb{C},\ G_X(s) = e^{a_0 + a_1 s}$. En particulier en évaluant en 1, on obtient $1 = G_X(1) = e^{a_0 + a_1}$ d'où $e^{a_0} = e^{-a_1}$ et ainsi $\forall s \in \mathbb{C},\ G_X(s) = e^{-a_1 + a_1 s} = e^{a_1(s-1)}$. On reconnaît la forme d'une fonction génératrice de loi de Poisson, mais il reste à vérifier que $a_1 \in \mathbb{R}_+$. On a G_X dérivable à gauche en 1 (et même $\mathbb{C}$-dérivable en 1 car entière), donc X est intégrable et on a $\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = a_1$. Or, X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$ et enfin $a_1 \geqslant 0$. On a bien montré finalement que G_X est la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(a_1)$, d'où finalement $X \sim \mathcal{P}(a_1)$. Le raisonnement est identique pour Y, ce qui termine la preuve du **Théorème 2**. Remarquons qu'on autorise ici $a_1 = 0$, ce qui signifie que $X = 0$ presque sûrement, et que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.